

Schémas conservatifs pour la dynamique des gaz sur grilles cartésiennes décalées

■ G. DAKIN - H. JOURDREN / CEA – DAM Île-de-France

Les équations de la dynamique des gaz interviennent dans une grande variété de problèmes physiques. La plupart des méthodes proposées dans la littérature visent à répondre à une classe particulière de ces problèmes. Une nouvelle méthode numérique est proposée pour approcher la solution de ces équations. Cette méthode, ou classe de schémas, permet de simuler un large spectre de problèmes comprenant ondes de choc, propagation acoustique à longue distance et dynamique des tourbillons. L'essentiel, pour une telle méthode, est d'assurer la capture correcte des chocs en vérifiant des critères de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. En outre, elle est basée sur une formulation en grilles cartésiennes décalées qui permet de monter en ordre, mais aussi d'assurer une meilleure restitution des ondes acoustiques.

La mécanique des fluides est un domaine physique vaste dans lequel se côtoient tout autant des écoulements très réguliers que des écoulements présentant des chocs et des discontinuités. Dans le but de simuler une large variété de problèmes, comme la propagation à longue distance d'ondes acoustiques, la dynamique des tourbillons, la propagation d'ondes de choc ou encore la simulation des grandes échelles, une nouvelle méthode est proposée pour approcher la physique de ces écoulements.

Intérêt de la formulation conservative d'ordre élevé sur maillages décalés

Cette méthode, ou schéma hydrodynamique, repose sur l'écriture des équations de l'écoulement fluide dans le référentiel de la matière, ou lagrangien, formulée en énergie interne. Une des propriétés importantes pour la simulation des écoulements fluides est la conservation, d'un point de vue discret, de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale du fluide. C'est une des conditions requises pour la capture correcte des ondes de choc. Pour cela, on utilise une discrétisation de l'espace basée sur des volumes finis réguliers (des segments de taille égale en 1D, des rectangles identiques en 2D). De plus, le schéma repose sur l'utilisation de grilles cartésiennes décalées. Les vitesses sont disposées au centre des faces d'une maille, tandis que les quantités thermodynamiques sont disposées au centre des mailles. Cette disposition permet à la fois une meilleure restitution des ondes acoustiques et une montée en ordre aisée. Cette montée en ordre

permet d'atteindre une plus grande précision pour des écoulements réguliers. Les propriétés requises de la méthode peuvent être ainsi résumées: (1) l'utilisation de grilles décalées pour une meilleure restitution acoustique, (2) une montée à l'ordre élevé pour davantage de précision sur les écoulements réguliers et (3) une conservation discrète de

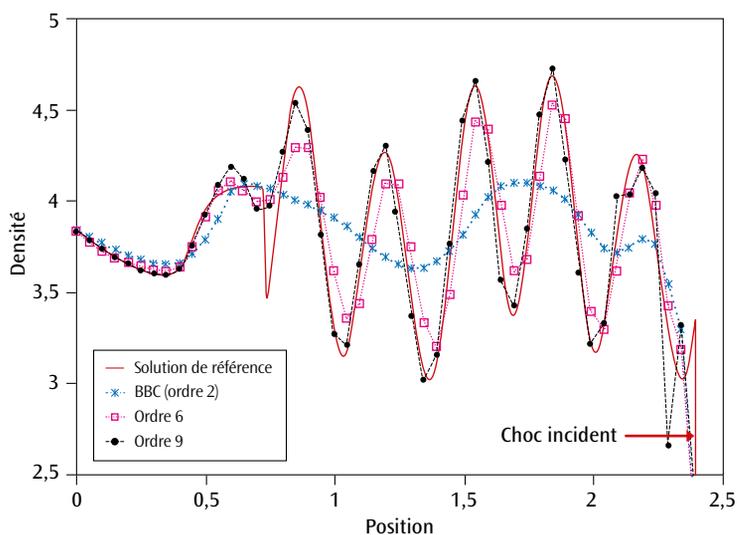


Figure 1. Cas-test de Shu-Osher: représentation du champ de densité, pour la propagation d'un choc à Mach 3 dans un milieu avec un champ de densité sinusoïdal. La solution de référence est calculée par un schéma de type Godunov classique d'ordre 1 avec 50000 mailles et représentée par la courbe rouge. En bleu, magenta et noir sont respectivement représentés les champs de densité obtenus pour les schémas d'ordre 2 (bleu), d'ordre 6 (magenta) et 9 (noir) avec 200 mailles. L'apport des ordres très élevés est visible, permettant avec un faible nombre de mailles de restituer correctement les oscillations derrière le choc incident.

Ordre	2	3	4	5	6	7	8	9
EOC	2,014	2,984	4,013	4,936	6,052	6,933	7,996	8,580

Tableau 1. Ordre expérimental de convergence (EOC) pour les schémas proposés sur les grilles cartésiennes décalées pour l'advection du vortex isentropique. Les ordres relevés correspondent aux ordres attendus, hormis pour le schéma d'ordre 9. Cette particularité est due à l'utilisation d'une séquence de splitting directionnel qui est d'ordre 8 en temps.

la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale pour la capture correcte des chocs.

Maillages décalés, énergie interne et conservation

Historiquement, le premier schéma hydrodynamique a été proposé par von Neumann et Richtmyer [1] à la fin des années quarante. Il s'agit d'un schéma 1D lagrangien d'ordre 2, explicite en temps, formulé en énergie interne, faisant usage de variables décalées en espace comme en temps. En 1961, Trulio et Trigger [2] identifient le défaut de conservation de l'énergie totale pour ce schéma. Le schéma n'est pas en mesure de restituer correctement les chocs. Ils proposent alors une version implicite strictement conservative, décalée en espace mais centrée en temps. En 1984, une version conservative Lagrange-projection centrée en temps et explicite (dite BBC) est publiée [3] pour des maillages 2D cartésiens décalés. Récemment, des schémas Lagrange-projection sur grilles cartésiennes centrées d'ordre très élevé (c'est-à-dire supérieurs à deux) ont été proposés [4]. Enfin, l'extension à l'ordre très élevé de schémas sur grilles cartésiennes décalées de type BBC a été réalisée au CEA – DAM Île-de-France [5].

La montée à l'ordre très élevé en espace se fait par l'utilisation d'interpolation par polynômes d'ordre élevé, tandis que l'ordre très élevé en temps se fait par l'utilisation de séquences de type Runge-Kutta. La conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'obtient par simple écriture. *A contrario*, la conservation de l'énergie totale, somme des énergies interne et cinétique, n'est pas évidente. Elle est réalisée grâce à un correcteur en énergie interne qui permet ainsi la capture correcte des ondes de choc. La spécificité du travail exposé dans [5] est de parvenir à regrouper les propriétés (1), (2) et (3).

À la fin de la phase lagrangienne, la densité, la quantité de mouvement et les énergies interne et cinétique sont projetées, de manière conservative, sur leurs grilles initiales respectives. L'extension 2D de la souche de schémas 1D est réalisée comme dans [4] avec des séquences d'ordre adéquat Strang-Yoshida de balayages directionnels. L'idée est de résoudre le problème alternativement dans chaque

direction. Du fait des propriétés de conservation du schéma 1D, le schéma 2D est conservatif avec une disposition naturelle des vitesses et des énergies cinétiques aux faces.

Des résultats numériques sont présentés jusqu'à l'ordre 9. Le cas-test de Shu-Osher (figure 1) traite l'interaction d'un choc à Mach 3 avec un champ sinusoïdal de densité et illustre la robustesse de ces schémas, ainsi que leur capacité à restituer le train d'onde derrière le choc incident. L'erreur numérique en fonction du nombre de mailles est calculée pour l'advection 2D d'un vortex isentropique : les ordres de convergence attendus sont effectivement atteints (tableau 1).

Conclusion

Cette nouvelle souche de schémas fait l'objet d'une introduction dans une plate-forme de simulation, pour comparaison à des schémas centrés [4] sur des problèmes où l'ordre de convergence est essentiel, comme en propagation longue distance d'ondes acoustiques, dynamique des tourbillons ou simulation des grandes échelles.

Références

- [1] J. VON NEUMANN, R.D. RICHTMYER, "A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks", *J. Appl. Phys.*, **21**, p. 232-237 (1950).
- [2] J. TRULIO, K. TRIGGER, "Numerical solution of the one-dimensional Lagrangian hydrodynamics equations", *Lawrence Radiation Laboratory Report*, Technical Report UCRL-6267 (1961).
- [3] P. WOODWARD, P. COLELLA, "The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks", *J. Comput. Phys.*, **54**, p. 115-173 (1984).
- [4] F. DUBOC, C. ENAUX, S. JAOUEN, H. JOURDREN, M. WOLFF, "High-order dimensionally split Lagrange-remap schemes for compressible hydrodynamics", *C. R. Acad. Sci. Paris - Ser. I - Mathematics*, **348**, p. 105-110 (2010).
- [5] G. DAKIN, H. JOURDREN, "High-order accurate Lagrange-remap hydrodynamic schemes on staggered Cartesian grids", *C. R. Acad. Sci. Paris - Ser. I - Mathematics*, **354**, p. 211-217 (2016).