

# SCHEMAS POUR L'HYDRODYNAMIQUE ET EQUATIONS D'ETAT NON CONVEXES

O. HEUZÉ, S. JAOUEN, H. JOURDREN  
CEA - DAM - ÎLE-DE-FRANCE

*Simuler la propagation d'ondes dans des matériaux susceptibles de changer de phase sous choc (étain, plomb, etc.), soulève des problèmes pour lesquels les méthodes numériques actuelles n'ont pas été conçues. Nous proposons un cas-test simple qui rassemble les difficultés que les schémas numériques futurs devront surmonter pour résoudre les équations d'Euler dans ces situations.*

Dans un matériau *classique*, l'équation d'état est convexe (la célérité du son est une fonction croissante de la pression) et les ondes d'amplitude finie se propagent soit en onde de choc, soit en faisceau de détente. Initiées dans les années 50, les méthodes utilisées aujourd'hui pour simuler ces phénomènes sont basées sur des schémas numériques d'ordre de plus en plus élevé afin de gagner en précision.

Cependant, lors des changements de phase ou au voisinage du point critique, l'équation d'état perd sa convexité et des systèmes d'ondes plus complexes apparaissent [1] : ondes composites avec dédoublement de choc, compression isentropique ou choc de raréfaction. Les critères mathématiques, sur lesquels s'appuient les méthodes numériques actuelles (*condition d'entropie* ou *critère*

*de Lax*), ne sont alors plus suffisants pour garantir l'unicité de la solution. Ce problème est alors résolu par le critère plus restrictif d'existence d'un profil de viscosité. En pratique cela signifie qu'un schéma doit contenir suffisamment de diffusion numérique pour capturer une onde composite, ce qui semble incompatible avec l'emploi de schémas d'ordre élevé.

Nous proposons dans la référence [2] un cas-test simple constitué d'une équation d'état non convexe (*matériau "Bizarrium"*) et d'une donnée initiale qui génère, de part et d'autre de la discontinuité de contact, les systèmes d'ondes composites obtenus en détente et en compression. À titre d'exemple, la *figure 1* montre un scénario de *détente / choc de raréfaction / détente* à gauche et un autre de *choc / compression isentropique / choc* à droite.

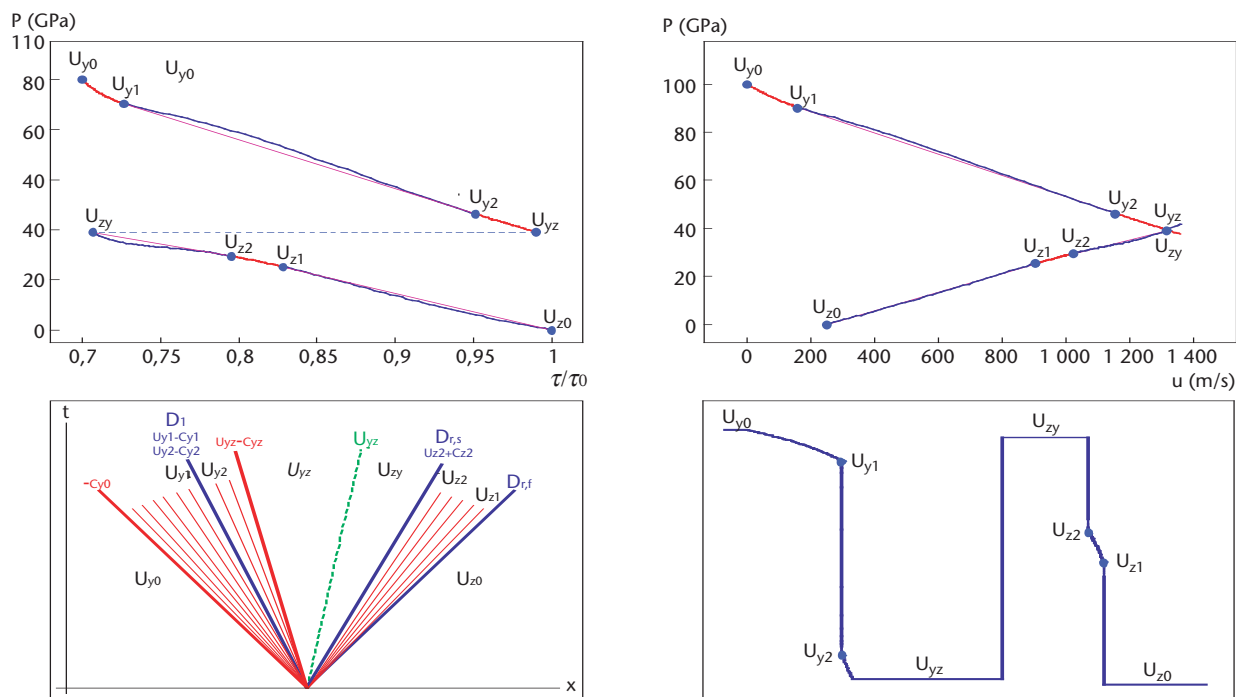


Figure 1 "Benchmark Bizarrium". Courbes d'ondes issues des états gauche  $U_{y0}$  et droit  $U_{z0}$  dans les plans  $(p, \tau)$  et  $(p, u)$  (haut) ; diagramme  $(x, t)$ , où la ligne verte représente la discontinuité de contact, et profil de densité de la solution exacte (bas).

### Panorama de schémas numériques

Pour illustrer les difficultés rencontrées, les deux grandes classes de méthodes, introduites dans les années 50 et toujours utilisées aujourd’hui, sont passées en revue.

Les méthodes de type von Neumann-Richtmyer (vNR) [3] sont basées sur une formulation en énergie interne avec une viscosité artificielle pour le traitement des chocs. Cette viscosité permet de contrôler le degré de diffusion numérique du schéma et peut prendre de nombreuses formes [4] : viscosité linéaire et/ou quadratique, activée en compression voire en détente.

Les méthodes de type Godunov [5] sont formulées en énergie totale et reposent sur des solveurs de Riemann exacts ou approchés [4]. Associées au solveur acoustique d’ordre 1, trois extensions d’ordre élevé développées au CEA-DAM étaient jusqu’alors considérées comme robustes en contexte “équations d’état arbitraires” : le solveur GAD (Godunov Anti-Diffusé) du second ordre et les solveurs d’ordre arbitraire GAIA (Godunov Acoustic Invariant Advection) et GoHy (Godunov Hybride) [2].

### Résultats

Quelques résultats tirés de [2] sont présentés sur la figure 2, avec la convention suivante pour les légendes : schéma-ordre, type de limiteur. Probablement en raison du défaut de conservativité, le schéma vNR historique ne converge pas vers la solution physique. Sa version conservative BBC ([2] et références incluses) se révèle quant à elle satisfaisante, mais à condition d’activer la viscosité linéaire en compression et détente avec un coefficient supérieur à ceux généralement utilisés. Principale avancée des schémas de type vNR dans les années 80-90, une évaluation de la viscosité artificielle au second ordre [4] est alors possible, sous réserve d’utiliser un limiteur très dissipatif (Minmod plutôt que Christensen), afin de contrôler les oscillations au niveau des chocs.

Concernant les schémas de type Godunov, un fait remarquable est que la solution physique est capturée avec

le solveur acoustique d’ordre 1 sans aucun coefficient empirique. Mais là encore, les trois extensions à l’ordre 2 (GAD, GAIA et GoHy), ne donnent de résultats satisfaisants qu’avec le limiteur le plus dissipatif (Minmod plutôt que TVD), et actuellement, aucun des schémas d’ordre supérieur considérés ne convergent vers la bonne solution. Ces défauts de convergence sont attribués à un niveau de diffusion numérique insuffisant pour accrocher le profil de viscosité des ondes composites.

### Conclusion

Les schémas numériques d’ordre élevé, qui permettent un gain de précision significatif lorsque l’équation d’état est convexe, sont mis en défaut dès que l’on sort de ce cadre standard, en particulier lors de la prise en compte des changements de phase.

Le cas-test [2] constitue un moyen simple d’évaluer et de comparer les schémas numériques actuels et futurs dans les cas de non-convexité de l’équation d’état.

### Références

[1] R. MENIKOFF, B. J. PLOHR, “The Riemann problem for fluid flow of real materials”, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, p. 75-130 (1989).  
 [2] O. HEUZÉ, S. JAOUEN, H. JOURDREN, “Dissipative issue of high-order shock capturing schemes with non-convex equations of state”, *J. Comp. Phys.*, **228**, p. 833-860 (2009).  
 [3] J. VON NEUMANN, R.D. RICHTMYER, “A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks”, *J. Appl. Phys.*, **21**, p. 232-237 (1950).  
 [4] D. J. BENSON, “Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **99**, p. 235-394 (1992).  
 [5] S. K. GODUNOV, “A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics”, *Math. Sb.*, **47**, p. 271-306 (1959).

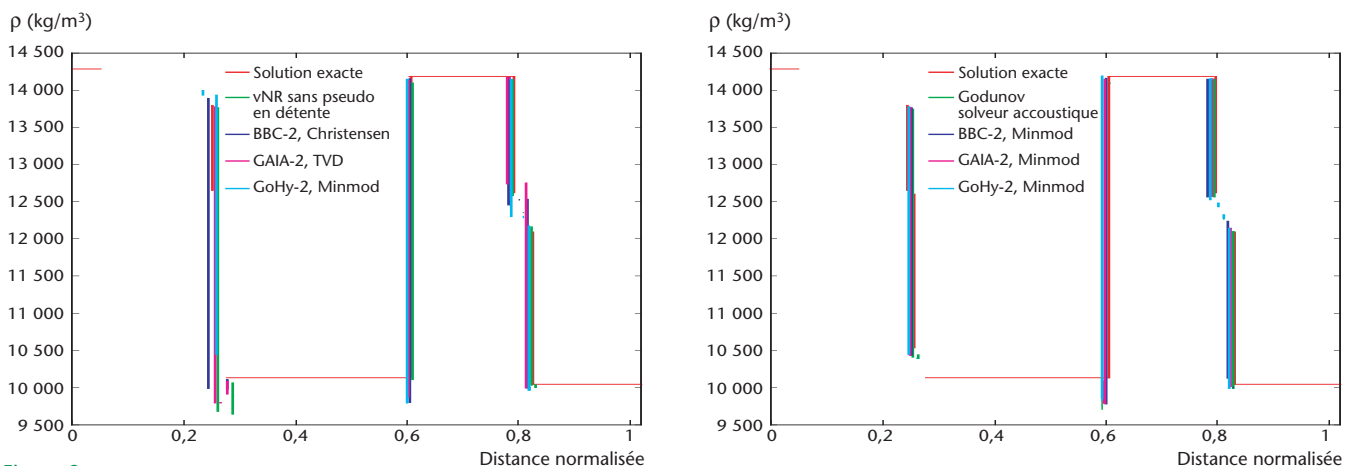


Figure 2 Profils de densité à  $t = 80 \mu s$  sur 10000 mailles obtenus avec quelques versions des schémas de type vNR et Godunov utilisées dans les codes d’hydrodynamique (voir [2] pour des résultats plus complets). La plupart montre de sévères pathologies (gauche). Seules les versions les plus dissipatives de ces schémas capturent la solution physique (droite).