Un multi-grille parallèle pour Maxwell harmonique

J. PESQUÉ - D. GOUDIN / CEA – Cesta
M. CHANAUD - L. GIRAUD - J. ROMAN / INRIA Bordeaux-SudOuest

La méthode multi-grille (MG) de résolution des systèmes linéaires a récemment retrouvé un très net regain d'intérêt par ses capacités à traiter de problèmes de très grande taille avec une efficacité parallèle inégalée. Réservée dans un premier temps aux opérateurs elliptiques, ses qualités ont poussé les chercheurs à étendre son domaine d'application. L'article décrit son adaptation à l'opérateur de Maxwell harmonique pour un calcul de Surface équivalente radar (SER). Grâce aux choix retenus, une convergence satisfaisante a été obtenue ainsi que de remarquables performances sur l'aspect parallélisme.

La méthode MG s'est imposée ces dernières années comme la méthode de référence pour résoudre les systèmes linéaires provenant de la discrétisation d'opérateurs elliptiques, en particulier grâce à son temps de calcul linéaire par rapport au nombre d'inconnues et à une extensibilité « parfaite » : si on dispose de *p* fois plus de processeurs, on peut traiter un système linéaire *p* fois plus gros dans le même temps calcul. Ces capacités se sont avérées rester valables pour des très grands nombres d'inconnues et de coeurs de calcul (plusieurs centaines de milliers de coeurs [1]). Par ailleurs, elle est très économe en mémoire : c'est un atout décisif pour les futures machines exaflopiques. Nous présentons ici les options retenues pour conserver au mieux ces qualités sur les matrices résultant de la discrétisation de Maxwell harmonique et ainsi que les performances obtenues.

Mise en oeuvre

On traite ici des systèmes linéaires résultant de la discrétisation par élément fini de Nédelec d'ordre 1 d'un problème de Maxwell harmonique dans le volume d'un objet. Les difficultés de ce type de matrices pour la méthode MG sont nombreuses. Après une étude préliminaire sur l'opérateur de Helmholtz, les choix suivants ont été retenus:

- Un *MG géométrique* (*MGG*). En effet, le MG algébrique ne nous est pas apparu assez mûr sur ce type d'opérateur (les coefficients sont des nombres complexes). Un autre argument plaide pour un MG géométrique : même si la géométrie peut être représentée correctement par un maillage de taille raisonnable, la nécessité d'avoir au moins 10 mailles par longueur d'onde, impose un très grand nombre d'inconnues pour les calculs à hautes fréquences. Ainsi, ce *MGG* choisi s'appuie sur une hiérarchie des maillages

Processeurs	Factorisation Temps en s	V-cycles (10) (en s)	Déraffinage %	Prolongation %	Lissage %
256	118	629	3,6	13,5	82,6
512	125	345	3,6	13,5	82,3
1024	152	213	3,6	13,4	81,9

Tableau 1. Extensibilité des différentes phases du MG sur un maillage fin de 339,5 millions d'inconnues (maillage grossier 21 millions, MG à 3 niveaux, 10 cycles pour la convergence).

automatiquement générés par découpage des éléments initiaux ;

- L'opérateur de Prolongation repose sur les fonctions de formes des éléments finis choisis. La Restriction canonique est retenue pour faciliter la parallélisation ;
- Le Lisseur retenu sur les grilles fines est de type Jacobi : il peut en effet se jouer sans assembler la matrice globale et est donc particulièrement économe en mémoire ;
- Sur cet opérateur, les matrices deviennent de plus en plus non définies positives quand on descend sur les grilles grossières : nous avons donc choisi de faire peu de niveaux de grilles et d'utiliser un solveur direct PaStiX [2] sur la plus grossière.

Précisions et éclaircissements peuvent être trouvés dans [3,4].

Convergence et performances parallèles

Dans des conditions favorables (nombres d'onde raisonnable et/ou présence de pertes diélectrique et/ou nombre suffisant de mailles par longueur d'onde), le MG ainsi défini converge jusqu'à des précisions suffisantes. Dans le cas contraire, on constate que ses premières itérations restent toujours rapidement convergentes; cela conduit alors à l'utiliser comme un préconditionneur très efficace [4].

Le **tableau 1** présente les performances de ce MG sur un problème de 339 millions d'inconnues pour un nombre de processeurs variant entre 256 et 1 024. La factorisation sur la grille grossière présente une extensibilité insuffisante, mais cela n'a pas d'importance car elle n'est réalisée qu'une seule fois en dehors de la boucle sur les cycles (itérations) du MG et de celle sur les angles d'éclairements de l'onde radar. Par contre, l'extensibilité du MG est beaucoup plus satisfaisante. Les trois colonnes de droite montrent que ses composantes les plus importantes ont un comportement similaire vis-à-vis de cet objectif : les autres composantes (entre autres, les résolutions sur grille grossière) prennent un temps négligeable (< 1%.).

Enfin, un calcul sur un maillage fin de 1,3 milliard d'inconnues a pu être mené en 1 700 s sur 1 024 processeurs. **La figure 1** montre le type de géométrie étudiée.

Conclusion

Les options retenues dans ce MG ont permis d'allier une convergence satisfaisante à un confort d'utilisation : le maillage fourni par l'utilisateur (décrivant la géométrie) est automatiquement raffiné pour respecter la condition liée à l'éclairement. Pour la première fois, un système linéaire de ce type (variable complexe) de plus de 1 milliard d'inconnues a été résolu, dans un temps raisonnable, sur la machine TERA 100. Le comportement sur un problème de Helmholtz est parfaitement identique. L'extension à d'autres opérateurs est à l'étude.

Figure 1. Exemple de géométries étudiées.

Références

[1] **A. BAKER** *et al.*, "Multigrid smoothers for ultraparallel computing", *SIAM, J. Sci. Comput.*, **33**, p. 2864-2887 (2011).

[2] **P. HÉNON** *et al.*, "PaStiX: A high performance parallel direct solver for sparse symmetric definite system", *Parallel Comput.*, **28**, p. 301-321 (2002).

[3] **M. BOULET** *et al.*, « Résolution des systèmes linéaires sur calculateurs pétaflopiques », *chocs*, **41**, p. 68-80 (2012).

[4] **M. CHANAUD, L. GIRAUD, D. GOUDIN, J. PESQUÉ. J. ROMAN,** "A Parallel Full Geometric Multigrid Solver for the Time Harmonic Maxwell Problem", *SIAM, J. Sci. Comput.*, **36**(2), p. C119 - C138 (2014) – doi : 10.1137/130909512.