

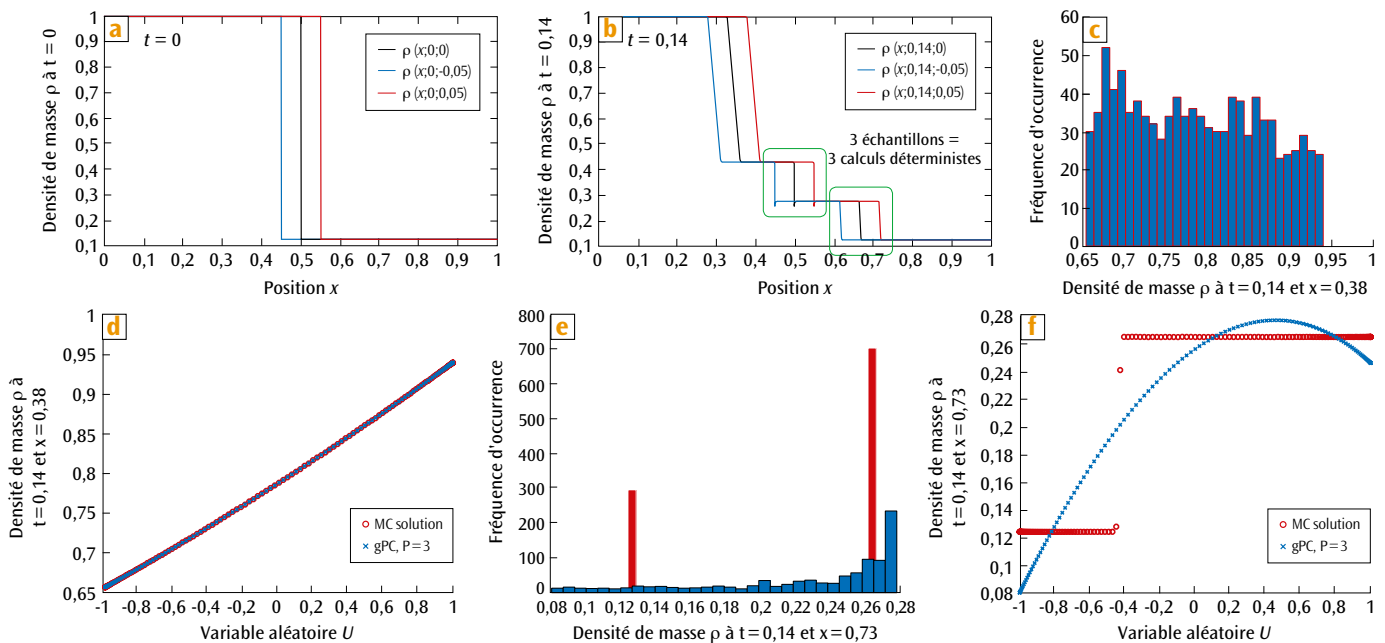
# Extension du chaos polynomial pour la propagation d'incertitudes

■ G. POËTTE / CEA – DAM Île-de-France

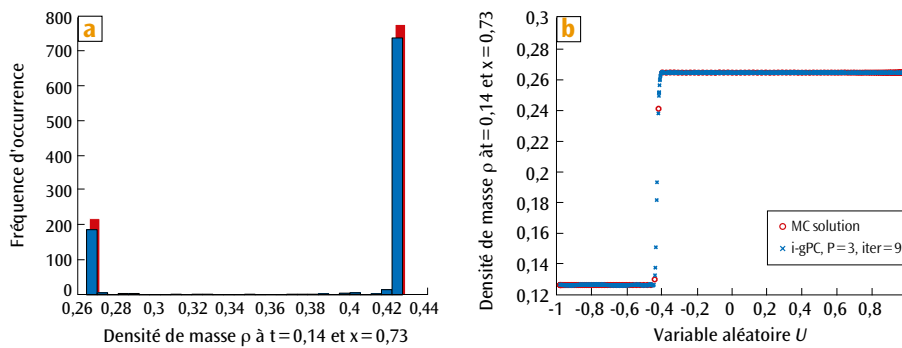
Le chaos polynomial (PC), introduit par Wiener [1] à la fin des années trente pour l'étude de phénomènes physiques instables, a récemment été appliqué à la propagation d'incertitudes avec sa généralisation (gPC) [2,3]. Il s'agit d'approcher des variables aléatoires modélisant une incertitude dans les conditions initiales, conditions aux limites ou les paramètres de modèles physiques. L'approche est prometteuse mais son efficacité (vitesse de convergence) reste limitée à l'approximation de variables aléatoires continues. Face à des phénomènes physiques non linéaires intenses avec effets de seuil, une méthode originale a récemment été introduite pour les variables aléatoires discontinues. Elle permet d'améliorer les performances de gPC en présence de solutions présentant de forts gradients [4,5]. Cette nouvelle approche, le gPC généralisé itératif (i-gPC), permet de repousser les limites d'application du chaos polynomial.

La précision des codes de simulation numérique, des mesures expérimentales auxquelles sont confrontés les résultats de simulation ainsi que les moyens de calcul toujours plus performants (high performance computing, HPC) ont récemment permis d'aborder une nouvelle discipline : la propagation d'incertitudes. Celle-ci a pour finalité la maîtrise de phénomènes aléatoires pour la prédiction de phénomènes complexes, la conception robuste ou

encore l'amélioration des modèles physiques. Elle se formalise de manière très générale : soit un modèle physique d'intérêt  $M$ , de variables aléatoires d'entrée  $U$ , il s'agit d'approcher la variable aléatoire de sortie  $Y = M(U)$ . Chaque variable aléatoire d'entrée  $U$  modélise la méconnaissance ou la variabilité de conditions initiales, conditions limites ou paramètres de modèles physiques. Le modèle  $M$  implique généralement la résolution d'équations aux dérivées



**Figure 1.** Il s'agit d'une configuration de tube à choc : initialement, deux fluides sont au repos de part et d'autre d'une interface ; en l'absence d'incertitudes, pour la densité de masse au cours du temps, une onde de détente apparaît dans le fluide léger (à gauche), un choc dans le fluide lourd (à droite) et reste entre les deux ondes la trace de la discontinuité de contact. Ces trois ondes sont observables sur la figure (b) (courbe noire par exemple). Lorsque la position initiale de l'interface est incertaine, modélisée par une variable aléatoire  $U$  uniforme la translatant sur l'axe des abscisses (trois réalisations de  $U$  sont présentées en (a)), le comportement des ondes est affecté (figure (b), positions différentes au même temps  $t = 0,14$ ). De plus, les histogrammes de la densité de masse à  $t = 0,14$  au voisinage de la détente ( $x = 0,38$ ) (c) et du choc ( $x = 0,73$ ) (e) obtenus par Monte-Carlo (rouge) et propagation d'incertitudes avec sa généralisation (ou gPC) (bleu) sont présentés ainsi que leurs représentations fonctionnelles équivalentes. Avec ces dernières, comportements continus (d) et discontinus (f) sont facilement identifiables. La solution gPC assure de très bons résultats avec un nombre raisonnable d'appels à  $M$  pour la détente (c)-(d) mais ne restitue pas le comportement discontinu pour le choc (e)-(f).



**Figure 2.** Comparaison des solutions i-gPC (gPC itératif) et Monte Carlo pour le choc dans les mêmes conditions que pour les figures 1e et 1f. La méthode i-gPC assure une bonne approximation de la variable aléatoire d'intérêt  $y$  compris au voisinage des discontinuités. Les résultats obtenus avec cette méthode sont donc exploitables et interprétables.

partielles (EDP) dans des configurations plus ou moins complexes. L'objectif est donc de résoudre des EDP stochastiques (EDPS).

La méthode de résolution d'EDPS la plus connue et la plus utilisée est la méthode de Monte Carlo. Elle consiste en l'échantillonnage de  $U$  en  $N$  points  $U_{i \in \{1, \dots, N\}}$  selon la loi de probabilité retenue, et la résolution de  $M$  en ces  $N$  points  $Y_i = M(U_i)$ . En contrepartie, sa vitesse de convergence est lente (en  $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ ). Son application peut donc s'avérer coûteuse, notamment lorsqu'une précision importante est nécessaire. Le gPC s'inscrit parmi les méthodes alternatives aux méthodes de Monte Carlo. Il a déjà démontré sa capacité à fournir des temps de restitution raisonnables dans des configurations réalistes [2]. Il est basé sur une représentation fonctionnelle des variables aléatoires, considérées comme des éléments d'un espace vectoriel de dimension infinie. L'idée est de projeter  $U$  et  $Y$  sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, et de déterminer les coefficients de ces projections à partir d'un nombre fini  $N'$  d'appels au code (avec  $N' \ll N$ ). Cette méthode montre toutefois ses limites, par exemple si  $Y$  a une loi de probabilité discontinue.

La figure 1 présente une application en hydrodynamique (équations d'Euler 1D compressible). Il s'agit d'une configuration de tube à choc simple. Initialement, deux fluides sont au repos de part et d'autre d'une interface les séparant. La position de cette interface sera supposée incertaine par la suite. Dans un premier temps, décrivons l'évolution déterministe (sans incertitude) de la densité de masse au cours du temps. Au temps  $t > 0$ , l'interface disparaît et une onde de détente apparaît dans le fluide léger (à gauche), un choc dans le fluide lourd (à droite) et reste entre les deux ondes la trace de la discontinuité de contact. Ces trois ondes sont observables sur la figure 1b (courbe noire par exemple). Supposons désormais que la position initiale de l'interface soit incertaine, modélisée par une variable aléatoire  $U$  uniforme la translatant sur l'axe des abscisses (trois réalisations de  $U$  sont présentées figure 1a). Comme en témoignent les 3 profils de densité à  $t=0,14$  de la figure 1b, l'incertitude affecte le comportement des ondes (positions différentes au même temps  $t=0,14$ ). Les histogrammes de la variable aléatoire densité à  $t=0,14$  et  $x=0,38$  (détente) et  $x=0,73$  (choc)

sont présentés en (c), (d) et (e). En (c), (d), (e) et (f), les courbes rouges correspondent à la référence obtenue par Monte Carlo. En  $x=0,38$ , figure 1c, la méthode gPC assure alors une très bonne précision pour seulement  $N'=27$  appels au modèle  $M$ , soit une précision équivalente à  $N=10^4$  appels Monte Carlo. Toutefois, au voisinage du choc ( $x=0,73$ ), figure 1e, le caractère discret de la solution Monte Carlo n'est pas restitué par le gPC (l'histogramme bleu ne restitue pas les 2 Dirac rouges). Le comportement discontinu, figure 1f, de la variable aléatoire nuit à la convergence de gPC.

L'enjeu est donc ici d'améliorer la convergence de l'approximation au voisinage du choc d'une part sans appels supplémentaires au modèle, d'autre part sans dégrader la précision de gPC et enfin de manière automatique sans hypothèse *a priori*. Ce cahier des charges est rempli via l'introduction du gPC itératif [4,5] (figure 2). La méthode construit une approximation récursive basée sur l'adaptation de la base gPC. L'adaptation est assurée par utilisation des moments de la distribution  $Y$ . À chaque pas du post-traitement, l'algorithme construit une base gPC de meilleure qualité que la précédente.

Dans [5], l'analyse numérique complète de la méthode est détaillée avec une démonstration du gain en norme  $L_2$  à chaque itération. Avec i-gPC, le domaine d'application des méthodes par chaos polynomial est étendu aux comportements physiques à de forts gradients.

## Références

- [1] N. WIENER, "The homogeneous chaos", *Amer. J. Math.*, **60**, p. 897-936 (1938).
- [2] R. G. GHANEM, P. D. SPANOS, *Stochastic finite elements: a spectral Approach*, Dover Publications, États-Unis (2003).
- [3] X. WAN, G. E. KARNIADAKIS, "Beyond Wiener-Askey expansions: handling arbitrary PDFs", *J. Sci. Comput.*, **27**, p. 455-464 (2006).
- [4] G. POËTTE, D. LUCOR, "Non Intrusive Iterative Stochastic Spectral Representation with Application to Compressible Gas Dynamics", *J. Comput. Phys.*, **231**, p. 3587-3609 (2012).
- [5] G. POËTTE, A. BIROLLEAU, D. LUCOR, "Iterative polynomial approximation adapting to arbitrary probability distribution", *SIAM J. Numer. Anal.*, **53**, p. 1559-1584 (2015).