Résolution numérique des équations de Maxwell
par décomposition de domaines

M. MOGNOT - B. STUPFEL / CEA – Cesta
M. CHANAUD / CS, Mérignac

Cet article s'intéresse au problème de la diffraction, en régime linéaire et harmonique, d'une onde électromagnétique par un objet tridimensionnel comportant des matériaux inhomogènes. Lorsque les dimensions de l'objet sont grandes devant la longueur d'onde incidente, la discrétisation numérique des équations de Maxwell conduit à un système linéaire de très grande taille. Celui-ci peut être résolu à l'aide d'une méthode de décomposition de domaines. Les résultats numériques obtenus avec un code parallèle, porté sur le supercalculateur TERA 1000 du CEA – DAM, montrent que cette méthode peut permettre la résolution précise de problèmes comportant des dizaines de millions d'inconnues.

Dans le cadre de ses activités dans le domaine de la furtivité radar, le CEA – Cesta développe des codes de calcul simulant le comportement électromagnétique d'un objet tridimensionnel situé dans le vide, typiquement un conducteur recouvert de matériaux inhomogènes. En régime harmonique, il est éclairé par une onde incidente plane émise par un radar se trouvant très loin de l'objet. Compte tenu de la faible amplitude de l'onde, les phénomènes physiques mis en jeu sont linéaires. Le calcul du champ diffracté par cet objet nécessite la résolution numérique des équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel.

Des méthodes de résolution dites exactes sont aujourd'hui bien maîtrisées **[1]**. Le domaine de calcul incluant l'objet est borné extérieurement par une surface fermée, sur laquelle est implémentée une équation intégrale garantissant une condition de rayonnement exacte. Le volume intérieur est maillé avec des tétraèdres à l'intérieur desquels les champs électromagnétiques sont représentés par des fonctions de base appropriées (discrétisation par éléments finis volumiques). Pour une fréquence donnée, la résolution des équations de Maxwell est alors ramenée à celle d'un système linéaire $A\,x=b$, où la solution x représente les valeurs discrétisées des champs, b étant le champ incident. La matrice A comporte une partie creuse provenant de la formulation éléments finis et une partie dense issue de l'équation intégrale. La dimension du système linéaire est de l'ordre de plusieurs centaines de millions pour les objets 3D intéressant le CEA – DAM. La complexité numérique (temps de calcul et taille mémoire) requise pour la résolution précise du système, que ce soit par une méthode directe (élimination de Gauss) ou itérative, devient alors rédhibitoire.

Une solution consiste à décomposer le domaine en sous-domaines. Les grandes lignes de la méthode de décomposition de domaines (DDM) proposée dans **[2]** sont les suivantes : on choisit un découpage du domaine de calcul en sous-domaines dont les interfaces sont, *grosso modo*, conformes à l'objet (**figure 1**). On obtient ainsi un système linéaire $A\,x=b$, semblable à celui mentionné précédemment mais comportant, pour l'essentiel, les particularités suivantes : la DDM introduit des inconnues supplémentaires définies

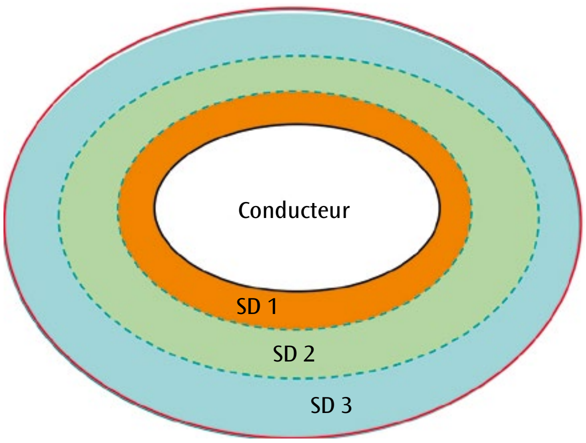
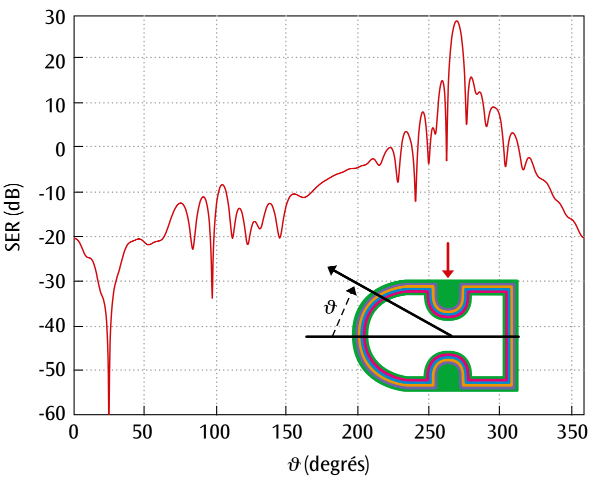


Figure 1. Décomposition du domaine de calcul en trois sous-domaines SD1, SD2 et SD3, pour l'application de la méthode de décomposition de domaines (DDM). Une condition de rayonnement exacte est prescrite sur la frontière extérieure.



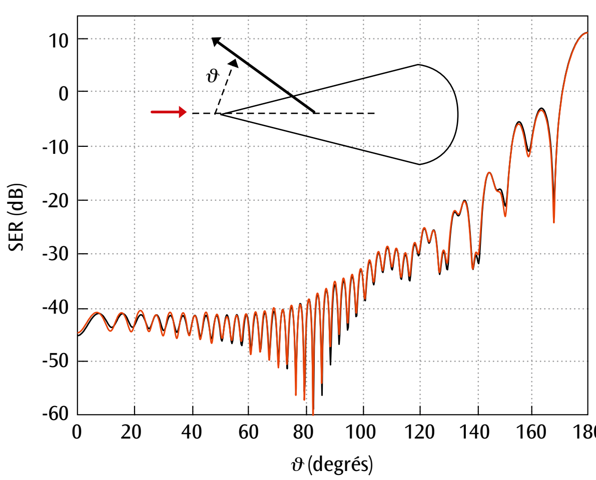


Figure 2. Surface équivalente radar (SER) en fonction de ϑ, l'angle d'observation de l'onde diffractée, pour un objet axisymétrique de longueur 8λ, λ étant la longueur d'onde de l'onde incidente. Le revêtement de matériaux, en couleur, est divisé en cinq sous-domaines. La flèche rouge indique la direction d'incidence de l'onde, la flèche noire la direction d'observation repérée par l'angle ϑ. La courbe rouge (noire) est la SER de référence (calculée avec la DDM, respectivement) : les deux courbes sont superposées. Le système comporte 35 millions d'inconnues ; sa résolution sur TERA 1000 avec 256 cœurs de 4 Go de mémoire chacun est réalisée en 4 500 secondes pour les deux polarisations (deux seconds membres *b*). Une seule polarisation est représentée.

Figure 3. Surface équivalente radar (SER) en fonction de ϑ, l'angle d'observation de l'onde diffractée, pour un cône axisymétrique de longueur 18λ (voir aussi légende de la **figure 2**). Le revêtement de matériaux (non représenté) est divisé en huit sous-domaines. Le système comporte 112 millions d'inconnues ; sa résolution sur TERA 1000 avec 384 cœurs est réalisée en 19 600 secondes pour les deux polarisations.

sur les interfaces, et la condition de rayonnement est assurée par une représentation intégrale, au lieu de l'équation intégrale habituellement utilisée dans la littérature. On peut voir cette DDM comme une méthode de préconditionnement du système qui s'écrit alors $M^{-1} A\, x = M^{-1} b$. M est une matrice diagonale par blocs (les blocs diagonaux de A), constituée de matrices carrées et creuses. L'unicité de la solution et l'inversibilité de ces matrices sont assurées par des conditions de transmission mixtes **[3]**. Le système préconditionné est résolu avec l'algorithme itératif GMRES (Generalized Minimal Residual), bien plus performant qu'une méthode itérative stationnaire (Jacobi, Gauss-Seidel, etc.). Au cours des itérations, le GMRES requiert essentiellement l'exécution de deux tâches : produit matrice-vecteur $A\, x$, et résolution de $M\, y = z$ où z est un intermédiaire de calcul de x.

Comme M est diagonale par blocs, la dernière opération est réalisée indépendamment pour chaque matrice. Pour les plus grosses, qui correspondent à un sous-domaine, on utilise le solveur direct PaStiX de l'Inria. Pour les autres, un simple gradient conjugué suffit. Notons que si la condition de rayonnement est décrite par une équation intégrale, alors un des blocs de M est une matrice dense C qui rend très coûteuse la résolution de $C\, y = x$.

Les résultats numériques présentés dans **[2]** ont été obtenus avec un code séquentiel. Celui-ci a été parallélisé sur la machine TERA 1000. Les matrices des sous-domaines sont factorisées avec la version MPI de PaStiX. Les algorithmes de gradient conjugué ainsi que des produits matrice-vecteur ont, avec MPI et Open MP, des performances proportionnelles au nombre de cœurs utilisés. Ces produits font intervenir les matrices denses issues de la représentation intégrale dont l'encombrement mémoire peut atteindre plusieurs dizaines de téraoctets. Leur nature autorise toutefois une réduction d'environ 95 % avec l'algorithme de compression ACA (Adaptive Cross Approximation). On constate donc que l'une des difficultés majeures de ce type de résolution, liée à l'implémentation de la condition de rayonnement exacte, a été supprimée. Les **figures 2** et **3** montrent la précision obtenue par cette méthode pour le calcul de la surface équivalente radar (SER) de deux objets de dimension 8λ et 18λ, où λ est la longueur d'onde incidente. Ces objets étant axisymétriques, les résultats sont comparés à ceux obtenus avec un code de référence 3D dédié aux corps de révolution. Le temps de calcul est fonction du nombre d'itérations du GMRES qui dépend des conditions de transmission. Celles utilisées sont très simples, même si elles ont été optimisées **[2]**. Des conditions de transmission plus performantes sont actuellement à l'étude.

Références

[1] **J. GUAN *et al.***, "Accurate and efficient finite element-boundary integral method with GPU acceleration for electromagnetic analysis", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **62**, p. 6325-6336 (2014).

[2] **B. STUPFEL *et al.***, "One-way domain decomposition method with exact radiation condition and fast GMRES solver for the solution of Maxwell's equations", *J. Comput. Phys.*, **322**, p. 882-904 (2016).

[3] **B. DESPRÉS *et al.***, "A domain decomposition method for the harmonic Maxwell equations", *in Iterative Methods in Linear Algebra*, R. Beauwens and P. de Groen (eds.), Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), p. 475-484 (1992).