

Schémas positifs pour la diffusion sur maillages non structurés

X. BLANC / Laboratoire Jacques-Louis-Lions (LJLL), Unité mixte de recherche 7598 CNRS – Université Denis-Diderot – Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris
 J.-S. CAMIER - F. HERMELINE - E. LABOURASSE / CEA – DAM Île-de-France

Les équations de diffusion interviennent dans la modélisation de nombreux problèmes physiques. Maîtriser la positivité de la solution discrète de ces modèles est critique dans beaucoup d'applications (positivité de la température en conduction thermique, positivité de la densité d'énergie radiative en photonique, etc.). Jusqu'à présent, cette positivité était imposée par des corrections *ad hoc*, au prix possible d'une perte de consistance du schéma de diffusion. Une méthode est proposée, qui permet d'assurer la positivité de la solution du schéma sans sacrifier sa précision.

Le principe de l'hydrodynamique lagrangienne est de suivre la matière dans son mouvement. Les équations d'Euler sont discrétisées sur un maillage qui se déplace à la vitesse du fluide, ce qui peut engendrer de grandes déformations de maillage. L'ensemble des opérateurs discrétisant la physique du problème doit s'adapter à ces déformations et notamment l'opérateur de diffusion. L'objectif est de conserver au niveau discret les propriétés de positivité de l'opérateur continu (robustesse), tout en assurant une précision suffisante (consistance). Jusqu'à récemment [1], aucune méthode numérique permettant de résoudre l'équation de diffusion, appelée schéma de diffusion, ne permettait d'assurer ces deux propriétés sur des maillages généraux.

Schémas positifs et consistants sur maillages déformés

Le principe de construction proposé dans [1] repose sur une discrétisation de type volumes finis de l'équation de diffusion. En d'autres termes, on intègre l'équation sur chaque maille du domaine de calcul, et on transforme cette intégrale de volume en une intégrale de bord via la formule de Green. Il reste alors à estimer cette intégrale de bord, ce qui revient à calculer le flux numérique (c'est-à-dire une approximation du gradient de la solution multipliée par le coefficient de diffusion et la normale) sur les bords de la maille. La **figure 1** représente deux mailles, de centres L et K, ayant un côté commun. En décomposant judicieusement le flux numérique de la maille K dans le repère (KM_1, KM_2) , un flux numérique F_1 précis au second ordre en espace pour le côté (M_1M_2) est obtenu. Ce flux dépend des valeurs des inconnues secondaires aux sommets $(M_1$

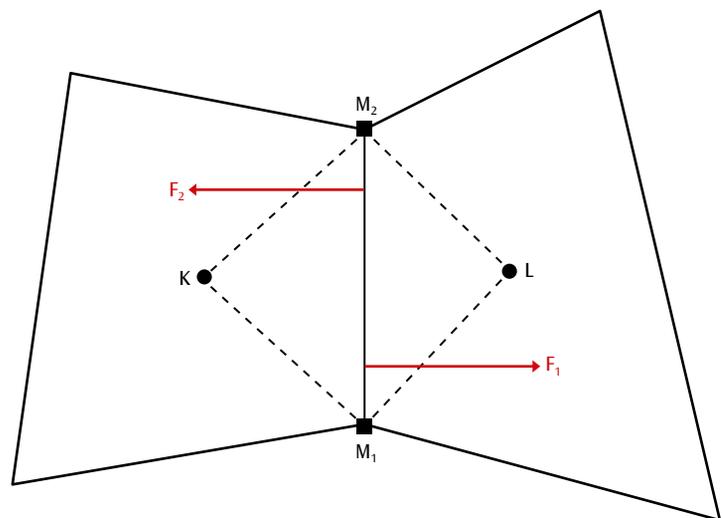


Figure 1. Deux mailles de centres K et L partagent une arête. Deux flux numériques F_1 et F_2 sont calculés par décomposition dans les repères (KM_1, KM_2) et (LM_1, LM_2) . Le flux retenu pour le schéma de diffusion, correspondant par exemple à l'échange de chaleur entre les deux mailles, est une combinaison linéaire de F_1 et F_2 , permettant d'imposer la positivité de la solution numérique du schéma, par exemple la température. Les inconnues primaires sont évaluées aux centres des mailles (K et L, cercles pleins) et les inconnues secondaires aux sommets (M_1 et M_2 , carrés pleins).

et M_2) et primaires au centre (K) de la maille. Cette opération est répétée dans la maille de centre L en vis-à-vis (flux F_2). Les propriétés de conservation de l'opérateur de diffusion imposent d'avoir un unique flux numérique pour la face (M_1M_2) . Or, il existe une infinité de flux précis au second ordre, par combinaison convexe de F_1 et F_2 . Ce degré de liberté est utilisé pour imposer la positivité de la discrétisation.

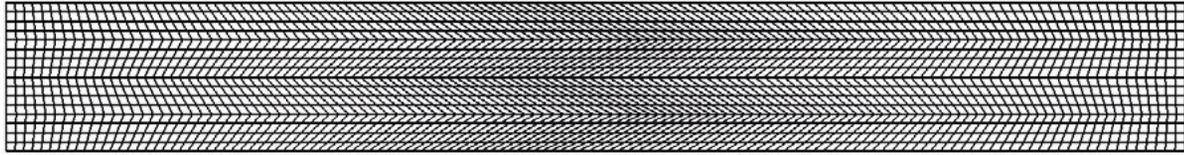


Figure 2.

Maillage de Kershaw. Les mailles sont délimitées par les lignes noires. La déformation en chevron permet d'évaluer les propriétés des schémas numériques sur maillages déformés.

Calcul des inconnues secondaires

Pour terminer la description du schéma, il convient de préciser comment sont évaluées les inconnues secondaires correspondant aux sommets du maillage (M_1 et M_2 sur la **figure 1**). Les méthodes d'évaluation proposées dans la littérature souffrent de plusieurs défauts rédhibitoires dans ce contexte : certaines sont impropres à la parallélisation et d'autres conduisent à des matrices non inversibles dans certaines configurations, ou à des schémas non consistants. C'est pourquoi deux nouvelles estimations des inconnues secondaires ont été développées, conduisant à des schémas parallélisables et consistants. La première [2] consiste à reconstruire les inconnues secondaires en fonction des inconnues primaires au centre des mailles par une méthode de moindres carrés. La seconde [3] nécessite de résoudre de concert le problème de diffusion sur le maillage dual. Cette méthode, inspirée de DDFV (Discrete Duality Finite Volume) [4], permet de conserver la convergence à l'ordre 2, même sur des mailles fortement non convexes.

Le schéma décrit dans [2] a été intégré avec succès dans un code de simulation. Dans le cas d'un test de propagation d'une onde radiative de Marshak [5] sur maillage déformé (maillage dit de « Kershaw », **figure 2**), une comparaison entre trois schémas de diffusion est illustrée sur la **figure 3** : le schéma positif mais non consistant (VF5) ne reproduit pas la solution de référence ; le schéma consistant mais non positif (Mimetic) reproduit la solution mais viole la contrainte de positivité ; le schéma développé ici reproduit la solution de référence et reste positif.

Conclusion

Nous avons proposé et implémenté un nouvel algorithme pour assurer la positivité de l'opérateur de diffusion sur des maillages quelconques. Cette méthode allie robustesse et précision, et améliore la qualité des simulations sur des configurations complexes. L'analyse numérique du schéma a été menée et ses propriétés de positivité, conservativité et convergence démontrées.

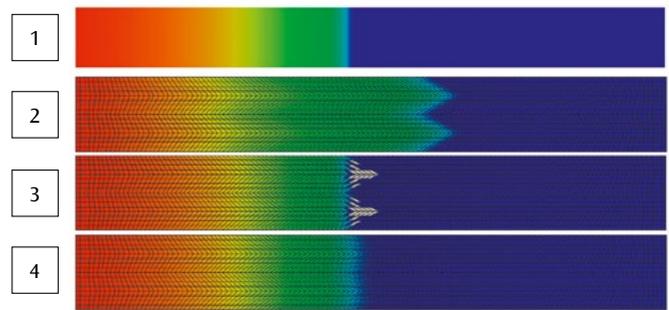


Figure 3.

Représentation du champ de température, avec propagation d'un front de température radiative dans un milieu opaque (onde de Marshak). Les figures correspondent au champ de température avec, de haut en bas, (1) la solution de référence, (2) la solution d'un schéma VF5 non consistant mais positif, (3) la solution d'un schéma consistant mais non positif (schéma Mimetic) et enfin (4) la solution avec le schéma décrit dans cet article. Les lignes noires correspondent au maillage (dit « de Kershaw », **figure 2**). Les mailles pour lesquelles la température radiative est sous le seuil ne sont pas colorées (maillage (3)).

Références

- [1] E. BERTOLAZZI, G. MANZINI, "A second-order maximum principle preserving finite volume method for steady convection-diffusion problems", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **43**, p. 2172-2199 (2005).
- [2] X. BLANC, E. LABOURASSE, "A positive scheme for diffusion problems on deformed meshes", *Z. Angew. Math. Mech.*, **95**, p. 1-21 (2015).
- [3] J.-S. CAMIER, F. HERMELINE, "A monotone non-linear finite volume method for approximating diffusion operators on general meshes", à paraître dans *Int. J. Numer. Meth. Engn.*, publié en ligne le 18 mars 2016.
- [4] F. HERMELINE, "A finite volume method for approximating 3D diffusion operators on general meshes", *J. Comput. Phys.*, **228**, p. 5763-5786 (2009).
- [5] D. MIHALAS, B. MIHALAS, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Dover publications, Series Dover books on physics, New York (1984).