Schémas lagrangiens et méthodes de remaillage en énergie totale

G. CARRÉ, S. DEL PINO, B. DESPRÉS, E. LABOURASSE
CEA - DAM - ÎLE-DE-FRANCE

Les équations de l'hydrodynamique compressible avec chocs modélisent une part importante des écoulements fluides. La simulation numérique de ce type d'écoulement a, de tout temps, stimulé de nouvelles études, tant au CEA-DAM que dans d'autres communautés pour lesquelles ces phénomènes sont importants (aéronautique). *L'originalité des méthodes présentées dans cet article est qu'elles sont lagrangiennes, c'est-à-dire que le maillage est mobile pour suivre le déplacement du fluide. Cela présente des intérêts pratiques multiples au prix d'une complexité certaine. Ce n'est que très récemment, à partir d'un effort de recherche mathématique et numérique initié en 2000, qu'il a été possible d'utiliser les approches modernes* (solveurs de Godunov) *dans les méthodes lagrangiennes multidimensionnelles. Nous décrivons dans cet article une contribution récente et expliquons l'intérêt de cette approche pour la simulation numérique tridimensionnelle pour la fusion par confinement inertiel (FCI) en contexte ALE* (*Arbitrary Lagrange Euler*) *et AMR* (*Adaptive Mesh Refinement*).

Méthodes lagrangiennes

La simulation numérique des écoulements compressibles tridimensionnels pour la FCI est très exigeante par nature. La connaissance du taux de compression de la matière fusible permet, si ce taux est calculé avec précision, de dimensionner les cibles. La méthode numérique classiquement utilisée trouve ses fondements dans les travaux originaux de *Von Neumann*. Elle est extrêmement efficace pour les écoulements purement lagrangiens avec un nombre de mailles raisonnable. En revanche, deux points durs subsistent pour toute méthode lagrangienne : le comportement à grand nombre de mailles *(c'est le problème de la convergence numérique)* et la compatibilité avec les techniques de remaillage, qu'il faut absolument mettre en œuvre pour des écoulements tourbillonnaires. Dans le cas où un remaillage est mis en œuvre, nous parlons de méthodes *ALE*. Les travaux de *Godunov* [1] ont levé en partie la difficulté en introduisant les méthodes numériques eulériennes en énergie totale : ces méthodes respectent par construction les lois physiques de conservation, ce qui garantit *in fine* une très bonne précision numérique après remaillage. Par exemple, considérons un maillage tel que celui de la *figure 1*, dans lequel les mailles sont indicées par la variable i, et ont un volume V_i^n variable au pas de temps n. La conservation de la masse totale s'écrit $M = \Sigma_i V_i^n \rho_i^n$, la conservation de la quantité de mouvement totale s'exprime sous la forme $Q = \Sigma_i V_i^n \rho_i^n u_i^n$, et la conservation de l'énergie totale est donnée par $E = \Sigma_i V_i^n \rho_i^n e_i^n$. Ici, ρ_i^n, u_i^n et e_i^n désignent la masse volumique, la vitesse et la densité d'énergie totale du fluide dans la maille courante. Ces formules expriment le fait qu'une certaine somme évaluée sur le maillage fournit un résultat qui ne dépend pas de l'indice du pas de temps. La vérification systématique de ces relations permet de garantir le respect des célèbres relations de *Rankine* et *Hugoniot* qui caractérisent les chocs. Les méthodes *ALE / AMR* vérifient facilement de tels principes de conservation pour des données numériques toutes centrées dans les mailles. Il restait à développer un schéma lagrangien de type *Godunov* qui vérifie ces principes [2].

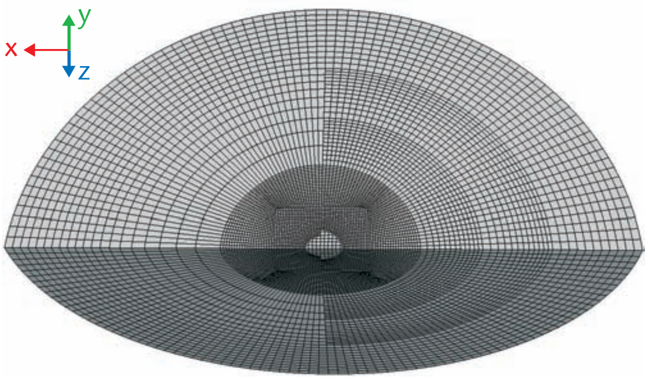

Figure 1
Exemple de simulations lagrangienne 3D en géométrie convergente.

Une nouvelle méthode numérique

Décrivons très brièvement le point principal [3]. Celui-ci a consisté à développer un solveur de *Riemann* multi-dimensionnel [4], dans lequel certaines relations de bilan ou de nature thermodynamique sont appliquées aux nœuds du maillage. Le point nouveau est que les méthodes de *Godunov* utilisaient cette approche, mais ces relations étaient appliquées sur les facettes du maillage. Même si la distinction peut paraître mineure, c'est la structure mathématique et numérique complète de la méthode numérique qui est modifiée. Une autre application remarquée de cette approche se trouve dans les travaux de l'équipe du CELIA qui travaille sur la simulation FCI en attaque directe.

Un choc convergent

La figure 1 montre un exemple de similation hydro-dynamique lagrangienne tridimensionnelle en géométrie convergente. Nous distinguons nettement un choc qui converge vers le centre du domaine *(le centre de la cible si l'on pense à une cible FCI)*. Le calcul a été réalisé deux fois, en configuration lagrangienne à gauche et en ajoutant une option de remaillage de type *AMR* à droite. Des comparaisons quantitatives montrent que la solution la plus précise est celle de droite. Cela illustre le gain de précision permis par ce genre de méthodes.

Vers l'ALE

La figure 2 correspond à une simulation *ALE*. Nous distinguons un écoulement avec vorticité. L'utilisation de l'*ALE* a permis de régulariser le maillage au prix d'une légère perte de précision dans le cœur du vortex. La simulation prenait en compte trois matériaux différents, ce qui a nécessité l'utilisation d'une méthode adaptée. La simulation a été réalisée sur le calculateur TERA 10 avec un nombre de processeurs égal à 16. Elle démontre l'adaptabilité de tels algorithmes aux architectures multi-processeurs des calculateurs scienti-fiques modernes.

Conclusion

Les avancées récentes faites dans la compréhension mathématique des équations lagrangiennes de la dyna-mique des fluides compressibles, permettent de construire des méthodes numériques lagrangiennes originales. La confrontation avec les solutions traditionnelles devrait rapidement quantifier ces avancées.

Références

[1] S. GODUNOV, "Reminiscences about difference schemes", *J. Comput. Phys.,* **153**, p. 6-25 (1999).

[2] G. CARRÉ, S. DEL PINO, B. DESPRÉS, E. LABOURASSE, "A cell-centered Lagrangian hydrodynamics scheme on general unstructured meshes in arbitrary dimension", soumis à *J. Comp. Physics* (2009).

[3] B. DESPRÉS, C. MAZERAN, "Symmetrization of lagrangian gas dynamics and lagrangian solvers", *C. R. Acad. Sci. Paris,* **331**, p. 475-480 (2003).

[4] B. DESPRÉS, C. MAZERAN, "Lagrangian gas dynamics in 2D and lagrangian systems", *Arch. Rat. Mech. Anal.,* **178**, p. 327-372 (2005).

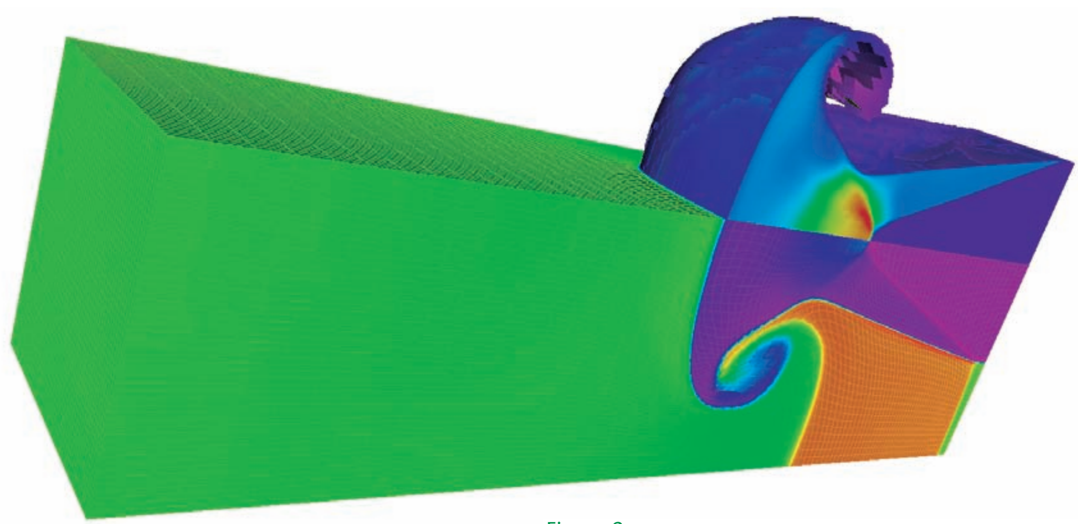

Figure 2
Simulation *ALE* décrivant un écoulement avec vorticité.